Tentamen Integrerend project systeemtheorie, 24 januari 2011

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. We bekijken het niet-lineaire systeem, beschreven door

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_2\cos(x_1) + u\\ \frac{d}{dt}x_2 &= (1+x_1)x_1 + (1+x_2)x_2 + x_1\sin(x_2)\end{aligned}$$

Hierin is u een input.

a. Laat zien dat $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0,0,0)$ een evenwichtspunt is.

b. Bepaal de linearisatie van het systeem in dit evenwichtspunt.

c. Laat zien dat dit evenwichtspunt instabiel is.

d. Ga na dat het gelineariseerde systeem regelbaar is.

e. Bereken een toestandsterugkoppeling $u = f_1x_1 + f_2x_2$ die het gelineariseerde systeem asymptotisch stabiel maakt.

3. Beschouw het systeem Σ gegeven door

$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1\ \ 0)\,x. \qquad (1)$$

a. Is Σ regelbaar?

b. Is Σ waarneembaar?

c. Is Σ stabilizeerbaar?

d. Is Σ detecteerbaar?

e. Bestaat er een waarnemer van de vorm

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = P\hat{x} + Qu + Ry$$

voor Σ? Zo ja, bepaal zo'n waarnemer

f. Bestaat er een stabilizerende output feedback-regelaar voor Σ? Zo ja, bepaal zo'n regelaar.

1

3. Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Laat $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ de niet-waarneembare deelruimte zijn van (C, A), i.e.,

$$\mathcal{O} = N(\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}).$$

a. Bewijs dat $\mathcal{O}$ een A-invariante deelruimte is.

b. Bewijs dat $\mathcal{O} \subseteq N(C)$.

c. Bewijs dat als $\mathcal{L}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is die A-invariant is en voldoet aan $\mathcal{L} \subseteq N(C)$, dan geldt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{L}$.

4. Beschouw het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, met toestandsruimte $\mathbb{R}^n$, inputruimte $\mathbb{R}^m$ en outputruimte $\mathbb{R}^p$. Stel dat we het systeem willen regelen door middel van een statische output-feedback van de vorm $u = Ny$, met N een reële $m \times p$ matrix. Als zo'n N bestaat die het geregelde systeem asymptotisch stabiel maakt, dan zeggen we dat het systeem kan worden gestabiliseerd door statische output feedback.

a. Schrijf, voor gegeven $N \in \mathbb{R}^{m\times p}$, de vergelijking op van het geregelde systeem.

b. Bewijs: als (A, B) regelbaar is, $p = n$, en $\det(C) \neq 0$ dan bestaat er $N \in \mathbb{R}^{m\times p}$ zodat het geregelde systeem asymptotisch stabiel is.

c. Bewijs: als (C, A) waarneembaar is, $m = n$, en $\det(B) \neq 0$ dan bestaat er $N \in \mathbb{R}^{m\times p}$ zodat het geregelde systeem asymptotisch stabiel is.

d. Laat door middel van een voorbeeld zien: als $m = p = 1$ en $n > 1$, dan bestaan er A, B en C met (A, B) regelbaar en (C, A) waarneembaar, zodat het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ *niet* kan worden gestabiliseerd door statische output feedback.

2

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 20
Vraagstuk 2: 25
Vraagstuk 3: 20
Vraagstuk 4: 25
10 punten gratis.

3